## SESIÓN 11

## DERIVACIÓN DE FUNCIONES TRIGONOMETRICAS INVERSAS

### I. CONTENIDOS:
1. Función inversa, conceptos y definiciones
2. Derivación de funciones trigonométricas inversas
3. Ejercicios resueltos
4. Estrategias Centradas en el Aprendizaje: Ejercicios propuestos

### II. OBJETIVOS:
Al término de la Clase, el alumno:
- Analizará las características de las funciones trigonométricas inversas
- Comprenderá las propiedades de este tipo de funciones
- Derivará esta clase de funciones.

### III. PROBLEMATIZACIÓN:
*Comenta las preguntas con tu Asesor y selecciona las ideas más significativas.*
- ¿Qué se entiende por una función inversa?
- ¿Cómo se puede representar gráficamente una función de este tipo?

### IV. TEXTO INFORMARTIVO-FORMATIVO:
### 1.1. Funciones inversas, conceptos y definiciones
De acuerdo al concepto de función ya definido en la lección correspondiente, decíamos que para un valor dado del dominio le corresponde uno y solamente un valor en el rango o contradominio. En la mayoría de los casos estudiados se dio una función de la forma $y = f(x)$ y se pidió determinar el valor de $y$ cuando se le asignaba un determinado valor a $x$. Sin embargo a veces por la propia naturaleza del problema estamos interesados en calcular el valor del elemento del dominio que corresponde a un determinado valor de la función o rango.

Para comprender mejor este concepto veamos el siguiente ejemplo:

Suponga que la velocidad de un móvil en $^{mts}/_{seg}$ varía con el tiempo $(seg)$ de acuerdo a la siguiente ecuación $v = 10 + 2t$ y deseamos saber en cuanto tiempo alcanzará una velocidad de $23\,^{mts}/_{seg}$, despejando en esta fórmula a $t$ esto nos queda $t = \frac{(v-10)}{2}$, sustituyendo el valor de $v = 23$ en la ecuación obtenemos $t = 6.5\,seg$, esto significa que le toma al móvil $6.5\,seg$ alcanzar dicha velocidad. Observe que ambas fórmulas $v = 10 + 2t$ y $t = \frac{(v-10)}{2}$ representan el mismo par ordenado para $t$ y $v$, solo que orden inverso. De esta forma, la fórmula $v = 10 + 4t$ da por resultado el par ordenado $(6.5, 23)$ y la ecuación $t = \frac{(v-10)}{2}$ da por resultado el par ordenado $(23, 6.5)$. A este proceso de intercambiar los números en un par ordenado funcional fundamenta un concepto matemático importante.

Dadas ciertas condiciones es posible obtener una nueva función a partir de una función dada $f(x)$ con solo intercambiar los números de los pares ordenados funcionales $\big(x, f(x)\big)$ o en otra notación equivalente $(x, y)$ .

A la función obtenida de esta manera se le llama ***función inversa*** de la función dada y se expresa matemáticamente mediante notación $f^{-1}$ , es muy importante señalar que esta notación no representa un exponente negativo, es solamente un símbolo que sirve para denotar la función inversa de $f$.
Bajo este orden de ideas podemos establecer la siguiente definición:

***Si $f^{-1}$ es la función inversa de $f$ , entonces la notación $y = f^{-1}(x)$ se debe entender como $x = f(y)$.***

La función definida por los siguientes pares ordenados $f = \{(2,1), (-3,2), (0,5)\}$ tiene por función inversa los siguiente pares ordenados $f^{-1} = \{(1,2), (2,-3), (5.0)\}$

El procedimiento que se sigue en álgebra para encontrar la función inversa de una función dada por
$y = f(x)$ se puede resumir en dos pasos:

$(1)$ Intercambiar las variables $x$ e $y$.

$(2\ )$ Resuelva la nueva ecuación para la variable $y$ , siendo la expresión resultante $f^{-1}(x)$.

Los siguientes ejercicios nos ayudan a comprende mejor este concepto, por lo que se recomienda al estudiante los repase detenidamente, para ahondar más en este tema consulte un tratado de álgebra y/o a su asesor.

Ejemplo $(1)$ Sea la función $f(x) = 5x + 6$ encuentre $f^{-1}(x)$ .

Solución: hagamos $y = 5x + 6$ intercambiemos $x$ por $y$ de tal manera que se obtiene

$x = 5y + 6$ resolviendo esta ecuación para $y$

$5y = x - 6$

$y = \frac{x-6}{5}$ o tambien en la forma equivalente $y = \frac{1}{5}x - \frac{6}{5}$ sustituyendo a $y$ por $f^{-1}(x)$ la función inversa es entonces:

$f^{-1}(x) = \frac{1}{5}x - \frac{6}{5}$

Ejemplo $(2)$ Sea la función $f(x) = \frac{(2x+1)}{(x+3)}$ encuentre su función inversa $f^{-1}(x)$

Solución: hagamos $y = \frac{(2x+1)}{(x+3)}$ intercambiemos las variables $x$ e $y$

$x = \frac{(2y+1)}{(y+3)}$ resolviendo para $y$ tenemos:

$xy + 3x = 2y + 1$

$xy - 2y = 1 - 3x$ factorizando tenemos

$y(x - 2) = 1 - 3x$

$y = \frac{1-3x}{x-2}$ sustituyendo a $y$ por $f^{-1}(x)$ se tiene: $f^{-x}(x) = \frac{1-3x}{x-2}$ que es la función inversa buscada.

Observe que el dominio de la función inversa de este ejemplo son todos los números reales excepto cuando $x = 2$. Restricciones como esta deberán siempre ser especificadas cuando se calculen funciones inversas.

*Las calculadoras científicas tienen una tecla **inv o arc** sin embargo es importante considerar que la operación de esta tecla se aplica únicamente a unas cuantas funciones selectas, entre ellas a las funciones trigonométricas y no ejecuta la operación inversa en general.*

Se recomienda al estudiante hacer uso de una calculadora de este tipo y adquirir destreza en su manejo.

### 2.1. Derivación de funciones trigonométricas inversas

Considere la siguiente ecuación:

(1) $$y = \sin x$$

Esto expresa que " $x$ es la medida en radianes de un ángulo cuyo valor de su función $seno$ es igual a $y$ ". Para un ángulo central del círculo unitario, $x$ también igual al arco interceptado; luego la preposición que se puso entrecomillada se abrevia de la siguiente forma:

(2) $x = arc \sin y$ o en la siguiente notación equivalente $x = \sin^{-1} y$

Intercambiando $x$ por $y$ en esta ecuación, se tiene:

(3) $$y = \sin^{-1} x$$

.

A esto se le llama la *función inversa del seno de* $x$. Se puede usar cualquiera de ambas notaciones.

Esta función está definida para todo valor de $x$ numéricamente menor que 1 o igual a 1, es decir $-1 \leq x \leq 1$ . De $(1)$ y $(2)$ vemos que $arc \sin y$ o $\sin^{-1} y$ son funciones inversas.

Consideremos el valor de $y$ que corresponde en (3) a $x = \frac{1}{2}$; se tiene:

(4) $$y = \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$

Un valor de $y$ que satisface a (4) es $y = \frac{1}{6}\pi$, puesto que $\sin\frac{1}{6}\pi = \sin 30° = \frac{1}{2}$ . Un segundo valor es

$y = \frac{5}{6}\pi$ puesto que $\sin\frac{5}{6}\pi = \sin 150° = \frac{1}{2}$ cad una de estas soluciones admite la adición o sustracción de un múltiplo cualquiera de $2\pi$.

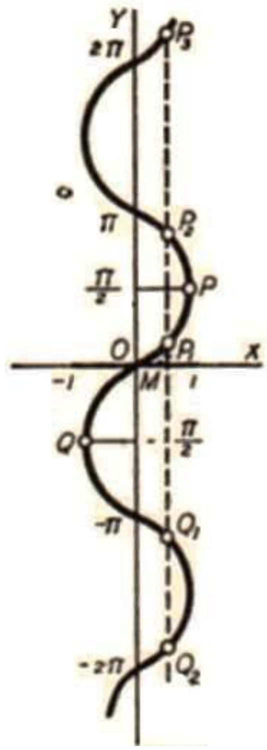


Fig. 1

Entonces el número de soluciones de $y$ que satisfacen a la ecuación (4) es infinito. Debido a esto decimos que la función $\sin^{-1} x$ es multiforme.La siguiente gráfica de $\sin^{-1} x$ muestra esta propiedad.Cuando $x = OM$ , entonces $y = MP_{1,}\ MP_{2,}MP_{3,} \ldots \ldots.,MQ_{1,}MQ_{2,} \ldots \ldots \ldots$

La mayoría de los problemas que se presentan en el ámbito del Cálculo se permite y es conveniente elegir uno de los muchos valores de $y$ . Por ejemplo elijamos el valor de $y$ entre $-\frac{1}{2}\pi$ y $\frac{1}{2}\pi$ , es decir, el de menor valor numérico, de esta manera:

$\sin^{-1} \frac{1}{2} = \frac{1}{6}\pi,$ $\sin^{-1} 0 = 0$ $\sin^{-1}(-1) = -\frac{1}{2}\pi$

La función $\sin^{-1} x$ es ahora uniforme, y si:
$y = \sin^{-1} x$ entonces - $\frac{1}{2}\pi \leq y \leq \frac{1}{2}\pi$ en la gráfica al arco $QOP$ .

De la misma manera cada una de las funciones trigonométricas inversas pueden hacerse uniformes. Así para $\cos^{-1} x$ , si:

$y = \cos^{-1} x$ entonces $0 \leq y \leq \pi$ veamos el siguiente ejemplo:

$\cos^{-1}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\pi$ , $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}\pi,$ $\cos^{-1}(-1) = \pi$ Observe que si sumamos $\sin^{-1} x +$ $\cos -1x=12\pi$

La cual es una identidad importante en trigonometría, se deja mal estudiante como ejercicio su comprobación.

En la gráfica de $\cos^{-1} x$ se limita al arco $QP_1P$

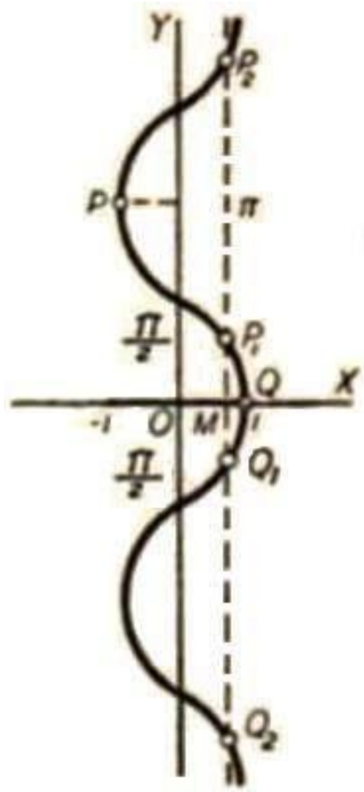


Fig. 2

A modo de ejemplo obtengamos la fórmula para la derivación de la función $y \sin^{-1} x$ .
Como ya se vio anteriormente, $\sin y = x$ derivando implícitamente con respecto a $x$ tenemos: $\frac{dy}{dx}\cos y = 1$ de aquí $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y}$ de la identidad $sin^2 x + cos^2 x = 1$ despejando y sustituyendo el valor de $y$ se tiene, $\cos y = \sqrt{1 - sin^2 y}$ como $\sin y = x$ podemos sustituir y hacer

$\cos y = \sqrt{1 - x^2}$ sustituyendo en la derivada queda finalmente: $\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ que es la fórmula para derivar $\sin^{-1} x$. Las fórmulas para las demás funciones inversas se obtienen mediante un proceso similar.

Para los propósitos de este curso solo veremos las derivadas de las tres funciones básicas inversas $(\sin^{-1} x, \cos^{-1} x, \tan^{-1} x)$, resumidas en las siguientes fórmulas:

$\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2}$

### 3.1. Ejercicios resueltos

1. Derive la función: $y = \frac{1}{\sin^{-1} x}$

Solución: $y = \frac{1}{\sin^{-1} x} = (\sin^{-1} x)^{-1}$ por lo que podemos sustituir
$\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x)^{-1} = -(\sin^{-1} x)^{-1}\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = -\frac{1}{(\sin^{-1} x)^2\sqrt{1-x^2}}$ Que es la derivada buscada

2. Derive la función: $y = \cos^{-1}(2x+5)$

Solución: Hagamos $u = 2x+5$ ahora derivemos a $u$ con respecto a $x$ tenemos entonces

$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(2x+5) = 2$ aplicando la fórmula para derivar $\cos^{-1} x$ tenemos

$\frac{d}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1-(2x+5)^2}}(2) = -\frac{2}{\sqrt{1-(4x^2+20x+25)}} = -\frac{2}{\sqrt{-4x^2-20x-24}} = -\frac{2}{\sqrt{4(-x^2-5x-6)}} = -\frac{2}{2\sqrt{-x^2-5x-6}}$

$= -\frac{1}{\sqrt{x^2-5x-6}}$ que es la derivada buscada.

3. Derive la función: $y = \tan^{-1} x^2$

Solución: Hagamos $u = x^2$ derivando a $u$ con repecto a $x$ tenemos:

$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2) = 2x$ aplicando la fórmula para derivar $\tan^{-1} x$ se tiene

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}\frac{du}{dx} = \frac{1}{1+(x^2)^2}(2x) = \frac{2x}{1+x^4}$ Que es la derivada buscada

4. Derive la función: $y = x\tan^{-1}\sqrt{x}$

Solución: $\frac{dy}{dx} = \left(\tan^{-1}\sqrt{x}\right) + x\frac{1}{\left(1+\left(\sqrt{x}\right)^2\right)}\left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right) = \left(\tan^{-1}\sqrt{x}\right) + \frac{\sqrt{x}}{2(1+x)}$ que es la derivada buscada.

En los siguientes ejercicios se emplea un método compacto, pero equivalente a los anteriormente vistos, se sugiere al estudiante los resuelva paso a paso como ejercicio.

5. Derive la función: $y = \sin^{-1}(2x-3)$ Solución $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-(2x-3)^2}}\frac{d}{dx}(2x-3) = \frac{1}{\sqrt{3x-x^2-2}}$

6. Derive la función: $y = \cos^{-1} x^2$ Solución $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}\frac{d}{dx}(x^2) = -\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$

7. Derive la función: $y = \tan^{-1} 3x^2$ Solución $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+(3x^2)^2}\frac{d}{dx}(3x^2) = \frac{6X}{1+9x^4}$

### 4.1. ESTRATEGIAS CENTRADAS EN EL APRENDIZAJE: Ejercicios propuestos.

Derive las siguientes funciones:

a) $y = \sin^{-1}\sqrt{x}$

b) $y = \cos^{-1}\frac{x}{a}$

c) $y = \tan^{-1}\frac{x}{a}$

d) $y = x\sin^{-1} 2x$

e) $y = x^2\cos^{-1} 2x$

f) $y = \tan^{-1}(3x+8)$